

5. Definice, věta, důkaz

Základním rysem soudobé matematiky je AXIOMATICKÁ LOGICKÁ VÝSTAVBA MATEMATICKÝCH TEORIÍ

– základem jsou AXIOMY (POSTULÁTY), tj. výchozí matematické výroky, které se přijímají za pravdivé bez dokazování

– obsahují ZÁKLADNÍ POJMY, které se nedefinují, ale pokládají se za zavedené právě soustavou axiomů

př. AXIOM: Každým bodem lze k dané přímce vést jedinou rovnoběžku.

ZÁKLADNÍ POJMY: bod, přímka, rovina, množina, ...

– další matematické pojmy se zavádějí pomocí DEFINIC, které stanoví názvy dalších pojmů a jejich charakteristické vlastnosti pomocí základních pojmů nebo pojmů dříve definovaných

př. KRUŽNÍCÍ nazýváme množinu všech bodů roviny, které mají od daného bodu stejnou nenulovou vzdálenost.

– výsledky zkoumání se formulují v MATEMATICKÝCH VĚTÁCH, tj. tvrzeních, které lze logicky odvodit z axiomů, definic a dříve dokázaných vět

– mají význam v matematické teorii nebo její aplikaci

– věty obsahující návod k provedení výpočtu nebo konstrukce nazýváme PRAVIDLA (pomocné věty LEMMA)

– pravdivost vět se musí dokazovat pomocí DŮKAZŮ, tj. úvah (logických procesů) zdůvodňujících platnost dané věty

– většina vět má tvar elementárního výroku, implikace, ekvivalence

A DŮKAZY ELEMENTÁRNÍCH VÝROKŮ (většinou důkaz přímý nebo sporem)

– PŘÍMÝ DŮKAZ

– založen na úsudku

a platí (víme)

$a \Rightarrow b$ platí (ukážeme)

b platí (závěr)

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Postup:

1. vyjdeme z pravdivého výroku a (axiom, dříve dokázaná matem. věta, často hledáme)

2. z pravd. výroku a odvodíme řetězcem pravdivých implikací výrok b

3. závěr: výrok b platí

Příklady

① Dokažte přímým důkazem, že platí $3 + \sqrt{2} > \sqrt{19}$. (ozn. jako výrok a)

1. předpokládáme pravd. výrok a

$$3 + \sqrt{2} > \sqrt{19} \quad |^2$$

$$(a+b)^2$$

$$9 + 6\sqrt{2} + 2 > 19$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$6\sqrt{2} + 11 > 19 \quad | -11$$

$$6\sqrt{2} > 8 \quad | :2$$

$$3\sqrt{2} > 4 \quad |^2$$

$$9 \cdot 2 > 16$$

$$18 > 16 \quad \dots \text{malum}$$

$$(2 > 0) \text{ pravd. výrok } a$$

2. vlastním důkazem (z pravd. výr. a se snažíme dospět k výroku b)

$$(2 > 0 \quad | +16)$$

$$18 > 16$$

$$9 \cdot 2 > 16 \quad | \sqrt{}$$

$$3\sqrt{2} > 4 \quad | \cdot 2$$

$$6\sqrt{2} > 8 \quad | +11$$

$$6\sqrt{2} + 11 > 19$$

$$9 + 6\sqrt{2} + 2 > 19$$

$$(3 + \sqrt{2})^2 > 19 \quad | \sqrt{}$$

$$3 + \sqrt{2} > \sqrt{19} \quad \dots b$$

a
 b_1
 b_2
 b_3
 $\vdots$
 b
řetězec pravdivých implikací

3. závěr: b platí, tj. platí
že $3 + \sqrt{2} > \sqrt{19}$

② Pythagorova věta: V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a s přeponou c platí:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (\text{Důkaz viz Planimetrie I. – konec šk. roku})$$

- DŮKAZ SPOREM (elementárního výroku)

- založen na úsudku

$\neg a \Rightarrow b$ platí

b neplatí

$\neg a$ neplatí, tj. platí a (závěr)

a	b	$\neg a$	$\neg a \Rightarrow b$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Příklady

③ Dokažte sporem, že platí

a) $3 + \sqrt{2} > \sqrt{19}$... neprok a

$7a: (3 + \sqrt{2})^2 \leq 19 \quad |^2$

$\Downarrow a^2 + 2ab + b^2$

$b_1: 9 + 6\sqrt{2} + 2 \leq 19$

$\Downarrow 11 + 6\sqrt{2} \leq 19$

$\vdots 6\sqrt{2} \leq 8 \quad | :2$

$\vdots 3\sqrt{2} \leq 4 \quad |^2$

$\Downarrow 9 \cdot 2 \leq 16$

$b_2: 18 \leq 16$... neplatí!

Závěr: $7a$ NEPLATÍ, tj.

PLATÍ $a: 3 + \sqrt{2} > \sqrt{19}$

(důkaz sporem kde rhodnější
než přímý důkaz)

④ Dokažte: $\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$

a) důkazem přímým,

$\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$... neprok b

1. hlavní před. nepoch a

$\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}} \quad |^2$

$a^2 + 2ab + b^2$

$11 + 10 < 1 + 2\sqrt{11 - \sqrt{10}} + 11 - \sqrt{10} \quad | -12 + \sqrt{10}$

$(a-b)^2 \quad |^2$

$a^2 - 2ab + b^2$

$4 \cdot 10 - 4\sqrt{10} + 1 < 4(11 - \sqrt{10})$

$41 - 4\sqrt{10} < 44 - 4\sqrt{10} \quad | +4\sqrt{10}$

$41 < 44$... neplatí!

2. hlavní důkaz

$41 < 44$... pravd. nepoch a $| -4\sqrt{10}$

$41 - 4\sqrt{10} < 44 - 4\sqrt{10}$

$a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^2 \quad |^2$

$2\sqrt{10} - 1 < 2\sqrt{11 - \sqrt{10}} \quad | +12 - \sqrt{10}$

$11 + \sqrt{10} < 1 + 2\sqrt{11 - \sqrt{10}} + 11 - \sqrt{10}$

$11 + \sqrt{10} < (1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}})^2 \quad | \sqrt{\quad}$

$\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$... neprok b

b) $\sqrt{7} + \sqrt{7} \geq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}$... nepoch a

$7a: \sqrt{7} + \sqrt{7} < 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}} \quad |^2$

$\Downarrow$

$b_1: 7 + 7 < 1 + 2\sqrt{7 - \sqrt{7}} + 7 - \sqrt{7}$

$\Downarrow$

$(a-b)^2 \quad |^2$

$a^2 - 2ab + b^2$

$4 \cdot 7 - 4\sqrt{7} + 1 < 4(7 - \sqrt{7})$

$\Downarrow$

$29 - 4\sqrt{7} < 28 - 4\sqrt{7}$

$\Downarrow$

$29 < 28$... neplatí!

Závěr: $7a$ NEPLATÍ, tj.

PLATÍ $a: \sqrt{7} + \sqrt{7} \geq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}$

b) sporem.

$\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$... nepoch a

$7a: \sqrt{11} + \sqrt{10} \geq 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}} \quad |^2$

$a^2 + 2ab + b^2$

$11 + 10 \geq 1 + 2\sqrt{11 - \sqrt{10}} + 11 - \sqrt{10}$

$(a-b)^2 \quad |^2$

$a^2 - 2ab + b^2$

$4 \cdot 10 - 4\sqrt{10} + 1 \geq 4(11 - \sqrt{10})$

$41 - 4\sqrt{10} \geq 44 - 4\sqrt{10}$

$41 \geq 44$... neplatí!

Závěr: $7a$ NEPLATÍ,

tj. platí a

$\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$

3. Závěr: nepoch b platí,

tj. $\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$ PLATÍ

PŘÍMÝ DŮKAZ:

a platí

$a \Rightarrow b$ pl.

b platí

SPOREM:

$7a \Rightarrow b$ platí

b neplatí

$7a$ neplatí, tedy a platí